ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

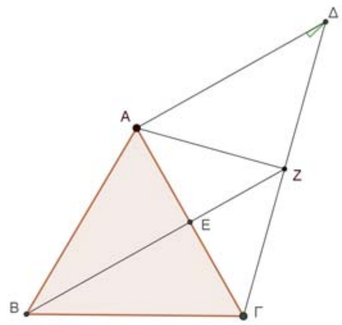
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



Πρόβλημα 3
Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α.

Πρόβλημα 4
Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

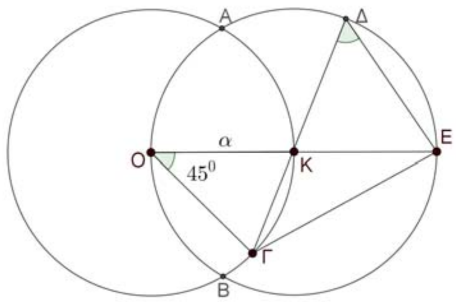
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \dfrac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \dfrac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^{\circ}$, να βρείτε :



(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$, και
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Πρόβλημα 3
Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4
Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d .$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\dfrac{\mathrm{A}}{36} < \dfrac{\mathrm{B}}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\dfrac{\mathrm{A}}{36}, \dfrac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x \leq x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$\mathrm{A}=2017\cdot 2016\cdot 2015\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$\mathrm{A} = \left(\alpha^2 + 18\right)^2 - \left(8\alpha + 1\right)^2$$

είναι πρώτος.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}\,.$$

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x + \frac{1}{x} - w = 2,\ \ y + \frac{1}{y} - w = 2,\ \ z + \frac{1}{x} + w = 2,\ \ y + \frac{1}{z} + w = 2\right\}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της A,B και Γ με τετμημένες α,β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A}=14^7+14^2+1$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!