Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Αλγεβρα Α΄ Λυκείου
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Αντώνης Κυριακόπουλος - Θανάσης Μαλαφέκας
Επιμέλεια: Χρήστος Λαζαρίδης, Χρήστος Τσιφάκης

Στα επόμενα, με D θα συμβολίζουμε το σύνολο ορισμού της δοσμένης εξίσωσης ή ανίσωσης και όταν δεν αναφέρουμε το σύνολο ορισμού της, θα εννοούμε ότι D=$\mathbb{R}$.

Άσκηση 1. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x-\frac{\frac{x-5}{4}-3x}{3}=\frac{\frac{2x-1}{3}-2}{2} \quad (1).$$

Λύση. Έχουμε, για κάθε $x \in D = \mathbb{R}$:

$$(1) \Leftrightarrow x-\frac{\frac{x-5-12x}{4}}{3}=\frac{\frac{2x-1-6}{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{-11x-5}{12}=\frac{2x-7}{6} \Leftrightarrow 12x+11x+5=2(2x-7)$$

$$\Leftrightarrow 23x+5=4x-14 \Leftrightarrow 19x=-19 \Leftrightarrow x=-1.$$

Άσκηση 2. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{15}+\frac{x-1}{14}+\frac{x-2}{13}+\frac{x-3}{12}+\frac{x-4}{11}+\frac{x-5}{10}=6 \quad (1)$$

Λύση. Προφανώς D=$\mathbb{R}$.

Πρώτος τρόπος. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{15}-1\right)+\left(\frac{x-1}{14}-1\right)+\left(\frac{x-2}{13}-1\right)+$$

$$\left(\frac{x-3}{12}-1\right)+\left(\frac{x-4}{11}-1\right)+\left(\frac{x-5}{10}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-15}{15}+\frac{x-15}{14}+\frac{x-15}{13}+\ldots+\frac{x-15}{10}=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-15)\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{14}+\frac{1}{13}\ldots+\frac{1}{10}\right)=0 \Leftrightarrow x=15.$$

Δεύτερος τρόπος (χωρίς πράξεις). Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (1) έχει την λύση: x=15. Η εξίσωση αυτή μετά την απαλοιφή των παρονομαστών κλπ. είναι ισοδύναμη (έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις) με μια εξίσωση της μορφής: $\alpha x+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Άρα, η δοσμένη εξίσωση ή θα είναι αδύνατη ή θα έχει λύση κάθε αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ή θα έχει μια μοναδική λύση.. Αλλά, δεν είναι αδύνατη αφού έχει τη λύση x=15 και δεν έχει λύση κάθε αριθμό $x \in \mathbb{R}$, αφού με x=0 δεν επαληθεύεται (αρνητικός αριθμός=θετικός). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η δοσμένη εξίσωση έχει τη μοναδική λύση x=15.

Άσκηση 3. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2(x+1)}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{1+\frac{4}{x}}{9x-\frac{4}{x}} \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι το σύνολο D των αριθμών $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύουν:

$$\begin{cases} 9x^2-4 \neq 0 \\ 9x^2+12x+4 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ 9x-\frac{4}{x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(3x-2) \neq 0 \\ (3x+2)^2 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ 9x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+2 \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{2}{3} \\ x \neq \frac{2}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$ Συνεπώς: $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0\right\}$.

Έχουμε για κάθε $x \in D$:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x+2}{(3x+2)(3x-2)}-\frac{x-2}{(3x+2)^2}-\frac{x+4}{(3x+2)(3x-2)}=$$

$$=0 \Leftrightarrow (2x+2)(3x+2)-(x-2)(3x-2)-$$

$-(x+4)(3x+2)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=2$ (δεκτή, διότι $2 \in D$).

Άρα, η δοσμένη εξίσωση έχει τη μοναδική λύση: x=2.

Άσκηση 4. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{x+3}{x-\lambda}=\dfrac{x-2}{x-3}$ **(1)**

όπου x είναι ο άγνωστος και $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

Λύση. Προφανώς $D=\mathbb{R}-\{\lambda,3\}$. Για κάθε $x \in D$, έχουμε: . $(1) \Leftrightarrow x^2-9=x^2-2x-\lambda x+2\lambda$.

$\Leftrightarrow (\lambda+2)x=2\lambda+9 \qquad (2)$

1) Έστω ότι $\lambda=-2$. Τότε: $(2) \Leftrightarrow 0 \cdot x=5$, αδύνατη.

2) Έστω ότι $\lambda \neq -2$. Τότε: $(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{2\lambda+9}{\lambda+2}$. Για να είναι η λύση αυτή δεκτή, πρέπει και αρκεί:

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\lambda+9}{\lambda+2} \neq \lambda \\ \frac{2\lambda+9}{\lambda+2} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+9 \neq \lambda^2+2\lambda \\ 2\lambda+9 \neq 3\lambda+6 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 3.$$

Συνοπτικά

$\lambda=-2$ ή λ=-3 ή λ=3 : Αδύνατη

$\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$: $x=\dfrac{2\lambda+9}{\lambda+2}$

Άσκηση 5.

Να λυθεί η εξίσωση: $|5x-10|=|2x-4|+2x+1$ (1)

Λύση. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$(1) \Leftrightarrow 5|x-2|=2|x-2|+2x+1 \Leftrightarrow 3|x-2|=2x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ [3(x-2)=2x+1 \text{ ή } 3(x-2)=-2x-1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x=7 \text{ ή } x=1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(x=7$ ή $x=1)$. Άρα, οι λύσεις είναι: x=1 και x=7.

Άσκηση 6. Να λυθεί η εξίσωση:

$$3|x-2|-2x=3-|x+3| \ (1).$$

Λύση. Οι παραστάσεις που περιέχονται στα απόλυτα είναι: x–2 και x+3. Η πρώτη μηδενίζεται με x=2 και η δεύτερη με $x=-3$. Οι αριθμοί αυτοί χωρίζουν τον άξονα των πραγματικών αριθμών σε τρία υποδιαστήματα: $(-\infty,-3),[-3,2]$ και $(2,+\infty)$.

1) Λύσεις στο διάστημα: $(-\infty,-3)$. Με $x<-3$, έχουμε: $x+3<0$ και $x-2<0$. Συνεπώς:
$(1)\Leftrightarrow 3(-x+2)-2x=3-(-x-3) \ \Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 6x=0$
$\Leftrightarrow x=0$, μη δεκτή.

2) Λύσεις στο διάστημα: $[-3,2]$. Με $-3\le x\le 2$, έχουμε: $x+3\ge 0$ και $x-2\le 0$. Συνεπώς:
$(1)\Leftrightarrow 3(-x+2)-2x=3-(x+3)$
$\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 4x=6\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$, δεκτή.

3) Λύσεις στο διάστημα: $(2,+\infty)$. Με $x>2$, έχουμε: $x-2>0$ και $x+3>0$. Συνεπώς:
$(1)\Leftrightarrow 3(x-2)-2x=3-(x+3)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3$,
δεκτή. Άρα, οι λύσεις είναι: $x=\dfrac{3}{2}$ και $x=3$.

Άσκηση 7. Να λυθεί η εξίσωση: $3|x-2|=2x+\lambda$ (1) όπου x είναι ο άγνωστος και $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

Λύση. 1) Λύσεις στο διάστημα: $(-\infty,2)$. Με $x<2$, έχουμε: $(1)\Leftrightarrow 3(-x+2)=2x+\lambda\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x=6-\lambda \Leftrightarrow x=\dfrac{6-\lambda}{5}$. Η λύση αυτή για να είναι δεκτή πρέπει και αρκεί: $\dfrac{6-\lambda}{5}<2\Leftrightarrow 6-\lambda<10\Leftrightarrow\lambda>-4$.

2) Λύσεις στο διάστημα: $[2,+\infty)$. Με $x\ge 2$, έχουμε: $(1)\Leftrightarrow 3(x-2)=2x+\lambda\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\lambda+6$.
Η λύση αυτή για να είναι δεκτή πρέπει και αρκεί:

$$\lambda+6\ge 2\Leftrightarrow\lambda\ge -4.$$

Συνοπτικά

$\lambda<-4$: Αδύνατη
$\lambda=-4$: $x=2$
$\lambda>-4$: $x=\dfrac{6-\lambda}{5}$ και $x=\lambda+6$

Άσκηση 8. Να βρείτε τους τριψήφιους φυσικούς αριθμούς Α, των οποίων το άθροισμα των ψηφίων είναι 18, το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο του ψηφίου των εκατοντάδων και ο αριθμός Α+396 έχει τα ψηφία του Α γραμμένα κατά αντίστροφο τάξη.

Λύση. Έστω ότι το ψηφίο των εκατοντάδων του ζητούμενο αριθμού Α είναι x. Το ψηφίο των μονάδων θα είναι 2x και το ψηφίο των δεκάδων θα είναι: 18 – (x + 2x) = 18 – 3x. Έτσι θα έχουμε:

$$A=(2x)+(18-3x)\cdot 10+x\cdot 10^2=72x+180.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την τρίτη υπόθεση, έχουμε:

$$A+396=x+(18-3x)\cdot 10+(2x)\cdot 10^2\Leftrightarrow$$
$$72x+180+396=x+180-30x+200x\Leftrightarrow$$

$99x=396\Leftrightarrow x=4$. Άρα, ο ζητούμενος αριθμός είναι: $A=72\cdot 4+180=468$.

Άσκηση 9. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{2x}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}<\frac{2}{x(4x^2-1)}+\frac{1}{1-2x}. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι το σύνολο D των αριθμών. $x\in\mathbb{R}$. , για τους οποίους ισχύουν:

$$\begin{cases}2x-1\ne 0\\ 2x+1\ne 0\\ x(4x^2-1)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left(x\ne\frac{1}{2}\text{ και } x\ne -\frac{1}{2}\text{ και } x\ne 0\right)$$

Συνεπώς: $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2},0,-\dfrac{1}{2}\right\}$. Για κάθε $x\in D$, έχουμε : $(1)\Leftrightarrow\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2}{x(2x+1)(2x+1)}<0$

$$\Leftrightarrow\frac{x(2x+1)^2-x(2x-1)^2-2}{x(4x^2-1)}<0\Leftrightarrow ...$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(4x^2-1)}{x(4x^2-1)}<0\Leftrightarrow\ \frac{2}{x}<0\Leftrightarrow x<0.$$

Άρα, οι ζητούμενες λύσεις είναι: $x<0$ με $x\ne -\dfrac{1}{2}$

Άσκηση 10. Να λυθεί η ανίσωση: $\lambda(x+|x|)<\lambda-1$ (1) όπου x είναι ο άγνωστος και $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

Λύση. 1) Λύσεις στο διάστημα: $[0,+\infty)$. Με $x\ge 0$, έχουμε: $|x|=x$ και άρα $(1)\Leftrightarrow 2\lambda x<\lambda-1$. (2).

α) Έστω ότι: λ>0. Τότε: $(2)\Leftrightarrow x<\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}$ (3).

- Αν $\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}\le 0$, δηλαδή αν: $(0<)\lambda\le 1$, τότε οι λύσεις (3) δεν είναι δεκτές (αφού $x\ge 0$).
- Αν $\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}>0$, δηλαδή αν λ>1, τότε έχουμε τις λύσεις: $0\le x<\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}$.

β) Έστω ότι: λ=0. Τότε: $(2)\Leftrightarrow 0\cdot x<-1$, αδύνατη.

γ) Έστω ότι: λ<0. Τότε: $(2)\Leftrightarrow x>\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}(>0)$, λύσεις δεκτές.

2) Λύσεις στο διάστημα: $(-\infty,0)$. Με $x<0$, έχουμε: $|x|=-x$ και άρα: $(1)\Leftrightarrow 0\cdot x<\lambda-1$ (4).
Προφανώς, αν $\lambda\le 1$, η (4) είναι αδύνατη και αν λ>1, h (4) επαληθεύεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και τότε έχουμε τις λύσεις: $x<0$.

Συνοπτικά

$\lambda<0$: $x>\frac{\lambda-1}{2\lambda}$

$0\le\lambda\le1$: Αδύνατη $\lambda>1$: $x<\frac{\lambda-1}{2\lambda}$

Άσκηση 11. Ένας βοσκός όταν τον ρώτησαν πόσα πρόβατα έχει απάντησε ως εξής: «Ο αριθμός των προβάτων είναι άρτιος. Αν από τον αριθμό αυτό αφαιρέσετε το ένα και πάρετε τα δύο τρίτα του αριθμού που προκύπτει, τότε βρίσκετε αριθμό μεγαλύτερο του 17. Επίσης, αν στο ένα τρίτο του αριθμού των προβάτων προσθέσετε το ένα, τότε προκύπτει αριθμός που υπερβαίνει τη διαφορά του 4 από το μισό του αριθμού των προβάτων». Πόσα πρόβατα έχει ο βοσκός;

Λύση. Έστω x ο αριθμός των προβάτων, όπου x άρτιος φυσικός θετικός αριθμός. Σύμφωνα με αυτά που είπε ο βοσκός έχουμε:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}(x-1)>17\\ \frac{1}{3}x+1>\frac{x}{2}-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2>51\\ 2x+6>3x-24\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>\frac{53}{2}\\ x<30\end{cases}\Leftrightarrow 26{,}5<x<30\Leftrightarrow 27\le x\le 29.$$ Άρα: $x=28$.

Άσκηση 12. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2-\frac{7\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}x+\frac{2}{2+\sqrt{2}}=0\ (1)}$$

Λύση.

Έχουμε: $\frac{7\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}\left(4-\sqrt{2}\right)}{\left(4+\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)}=\frac{7\left(4\sqrt{2}-2\right)}{16-2}=$

$=2\sqrt{2}-1$. Και ανάλογα: $\frac{2}{2+\sqrt{2}}=...=2-\sqrt{2}$.

Έτσι έχουμε: $(1)\Leftrightarrow x^2-\left(2\sqrt{2}-1\right)x+2-\sqrt{2}=0$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής είναι:

$$\Delta=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2-4\left(2-\sqrt{2}\right)=...=1.$$

Συνεπώς ,οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$x=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)\pm1}{2}$, δηλαδή:. $x_1=\sqrt{2}$. και $x_2=\sqrt{2}-1$.

Άσκηση 13. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda x^2+2x+1=0$ (1) όπου x είναι ο άγνωστος και $\lambda\in\mathbb{R}$ παράμετρος.

Λύση.1) Έστω ότι $\lambda=0$. Τότε:

$$(1)\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

2) Έστω ότι $\lambda\neq0$. Τότε η δοσμένη εξίσωση είναι δεύτερου βαθμού και η διακρίνουσα της είναι:

$$\Delta=4-4\lambda=4(1-\lambda)\begin{cases}>0,\text{ αν }\lambda<1\\ =0,\text{ αν }\lambda=1\\ <0,\text{ αν }\lambda>1\end{cases}$$

α) Αν λ<1 ($\lambda\neq0$), τότε Δ>0 και η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4(1-\lambda)}}{2\lambda}=\frac{-1\pm\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}.$$

β) Αν λ=1, τότε Δ=0 και η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, την $x=-\frac{2}{2\lambda}=-\frac{2}{2}=-1$.

γ) Αν λ>1, τότε Δ<0 και η εξίσωση είναι αδύνατη.

Συνοπτικά

$\lambda<1,\ \lambda\neq0$: $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-\lambda}}{2}$

$\lambda=0$: x= $-\frac{1}{2}$.

$\lambda=1$: $x=-1$

$\lambda>1$: Αδύνατη.

Άσκηση 14. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2+x-1=0$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση αυτή:

1) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Τις ονομάζομαι ρ_1 και ρ_2.

2) Να βρείτε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς: $x_1=\frac{\rho_1}{\rho_1-1}$ και $x_2=\frac{\rho_2}{\rho_2-1}$.

Λύση. 1) Η διακρίνουσα της δοσμένης εξίσωσης είναι: $\Delta=1+4=5>0$. Άρα, οι ρίζες της είναι πραγματικές και άνισες.

2) Έχουμε: $\rho_1+\rho_2=-1$ και $\rho_1\rho_2=-1$.. Έτσι έχουμε: $x_1+x_2=\frac{\rho_1}{\rho_1-1}+\frac{\rho_2}{\rho_2-1}=\frac{\rho_1\rho_2-\rho_1+\rho_1\rho_2-\rho_2}{(\rho_1-1)(\rho_2-1)}=$

$=\frac{2\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2)+1}=...=-1$ και όμοια: $x_1x_2=...=-1$. Άρα μια ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2+x-1=0$ (η δοσμένη).

Άσκηση 15.

Να βρείτε μια εξίσωση δεύτερου βαθμού με συντελεστές ρητούς αριθμούς, της οποίας ο αριθμός $\rho=\sqrt{2}\sqrt{8+\sqrt{15}}$ να είναι μια ρίζα της.

Λύση. Καταρχήν έχουμε: $\rho=\sqrt{2}\sqrt{8+\sqrt{15}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho>0\\ \rho^2=2\left(8+\sqrt{15}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho>0\\ \rho^2=2\left(8+\sqrt{15}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho>0\\ \rho^2=16+2\sqrt{15}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho>0\\ \rho^2=1+15+2\sqrt{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho>0\\ \rho^2=\left(1+\sqrt{15}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\rho=1+\sqrt{15}.$$

Ο αριθμός αυτός είναι ρίζα μιας εξίσωσης:

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) όπου α, β, $\gamma\in\mathbb{Q}$ με $\alpha\neq 0$, αν και μόνο αν: $\alpha\left(1+\sqrt{15}\right)^2+\beta\left(1+\sqrt{15}\right)+\gamma=0\Leftrightarrow$

$\alpha\left(1+15+2\sqrt{15}\right)+\beta\left(1+\sqrt{15}\right)+\gamma=0\Leftrightarrow$.

$(16\alpha+\beta+\gamma)+(2\alpha+\beta)\sqrt{15}=0\Leftrightarrow\begin{cases}16\alpha+\beta+\gamma=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}$

(γιατί;) $\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha\\ \gamma=-14\alpha\end{cases}$. Συνεπώς:

$(1)\Leftrightarrow\alpha x^2-2\alpha x-14\alpha=0\Leftrightarrow x^2-2x-14=0$

Άρα, η τελευταία εξίσωση είναι μια ζητούμενη .

Άσκηση 16. Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2-\beta x+\gamma=0$, όπου $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. με: $2\le\beta-2<\gamma<\beta$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει ρίζες πραγματικές και άνισες και ότι μία τουλάχιστον από αυτές ανήκει στο διάστημα $(0,2)$.

Λύση. 1) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$\Delta=\beta^2-4\gamma>\beta^2-4\beta=\beta(\beta-4)\ge 0$, διότι:

$-4\gamma>-4\beta$, $\beta>0$ και $\beta-4\ge 0$. Άρα: $\Delta>0$.

2) Ονομάζουμε ρ_1 και ρ_2 τις ρίζες` της εξίσωσης αυτής, οπότε: $\rho_1+\rho_2=\beta$ και $\rho_1\rho_2=\gamma$. Έχουμε:

$\beta-2<\gamma<\beta\Rightarrow-2<-\beta+\gamma<0\Rightarrow-1<1-\beta+\gamma<1\Rightarrow$

$\Rightarrow|1-\beta+\gamma|<1\Rightarrow\left|1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2\right|<1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|-(\rho_1-1)+\rho_2(\rho_1-1)\right|<1\Rightarrow\left|(\rho_1-1)(\rho_2-1)\right|<1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left|(\rho_1-1)\right|\left|\rho_2-1\right|<1$ (1). Αν $\left|\rho_1-1\right|\ge 1$ και $\left|\rho_2-1\right|\ge 1$, θα είχαμε: $\left|(\rho_1-1)\right|\left|\rho_2-1\right|\ge 1$, άτοπο λόγω της (1). Άρα: $\left(\left|\rho_1-1\right|<1 \text{ ή } \left|\rho_2-1\right|<1\right)\Rightarrow$

$\left(-1<\rho_1-1<1 \text{ ή } -1<\rho_2-1<1\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(0<\rho_1<2 \text{ ή } 0<\rho_2<2\right)$.

Άσκηση 17. Θεωρούμε τις εξισώσεις: $x^2-\lambda x+6=0$ (1) και $6x^2+\lambda x+1=0$ (2), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τους αριθμούς λ, για τους οποίους οι εξισώσεις αυτές έχουν πραγματικές ρίζες και μια ρίζα της πρώτης με το αντίστροφο μιας ρίζας της δεύτερης έχουν άθροισμα 1.

Λύση. 1) Έστω ότι για έναν αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$ πληρούνται τα επιτάγματα του προβλήματος. Ονομάζουμε ρ_1 και ρ_2 τις ρίζες της πρώτης εξίσωσης και x_1 και x_2 της δεύτερης. Προφανώς: $x_1\cdot x_2\neq 0$. Η διακρίνουσα και των δύο εξισώσεων είναι: λ^2-24, οπότε: $\lambda^2-24\ge 0\Rightarrow\lambda^2\ge 24\Rightarrow|\lambda|\ge\sqrt{24}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\lambda\ge\sqrt{24} \text{ ή } \lambda\le-\sqrt{24}\right)$ (3)

Έστω τώρα ότι: $\rho_1+\frac{1}{x_1}=1$, οπότε: $\frac{1}{x_1}=1-\rho_1$. Λόγω και αυτής, έχουμε: $6x_1{}^2+\lambda x_1+1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{x_1^2}+\lambda\frac{1}{x_1}+6=0\Rightarrow(1-\rho_1)^2+\lambda(1-\rho_1)+6=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\rho_1^2-\lambda\rho_1+6\right)+\lambda+1-2\rho_1=0\Rightarrow\rho_1=\frac{\lambda+1}{2}$, διότι $\rho_1^2-\lambda\rho_1+6=0$. Έτσι έχουμε:

$\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2-\lambda\cdot\frac{\lambda+1}{2}+6=0\Rightarrow...\Rightarrow\lambda^2=25\Rightarrow(\lambda=5 \text{ ή } \lambda=-5)$.

Και δύο τιμές του λ πληρούν την (3).

2) Αντιστρόφως. Έστω ότι λ = 5. Τότε, η πρώτη εξίσωση γίνεται: $x^2-5x+6=0$ και έχει ρίζες: $\rho_1=3$ και $\rho_2=2$ και η δεύτερη εξίσωση γίνεται: $6x^2+5x+1=0$ και έχει ρίζες $x_1=-\frac{1}{2}$ και $x_2=-\frac{1}{3}$. Έχουμε: $\rho_1+\frac{1}{x_1}=3-2=1$. Άρα η τιμή λ = 5 είναι δεκτή. Όμοια βρίσκουμε ότι και η τιμή λ = –5 είναι δεκτή. Άρα, οι ζητούμενες τιμές του λ είναι: λ=5 και λ=–5.

Άσκηση 18. Να βρείτε την αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των πραγματικών αριθμών β καιγ, για τις οποίες οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης: $x^2-\beta x+\gamma=0$ να είναι πραγματικές και να πληρούν τη σχέση: $3\rho_1-2\rho_2=\beta$.

Λύση. Καταρχήν έχουμε: $\Delta=\beta^2-4\gamma$ (1) και $\rho_1+\rho_2=\beta$ (2), $\rho_1\rho_2=\gamma$ (3) (αν $\Delta\ge 0$).

1ος τρόπος. i) Αναγκαίες συνθήκες. Έστω ότι η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές ρ_1 και ρ_2 και ότι ισχύει: $3\rho_1-2\rho_2=\beta$ (4).

Από τις (2) και (4) βρίσκομαι εύκολα ότι: $\rho_1=\frac{3\beta}{5}$ και $\rho_2=\frac{2\beta}{5}$. Αντικαθιστώντας στην (3), έχουμε: $\frac{3\beta}{5}\cdot\frac{2\beta}{5}=\gamma\Rightarrow 6\beta^2=25\gamma$.Ώστε, τότε, έχουμε: $\boxed{6\beta^2=25\gamma}$ (5). (αναγκαία συνθήκη).

ii) Ικανές συνθήκες (αντιστρόφως). Έστω ότι ισχύει η σχέση (5). Τότε έχουμε: $\gamma=\frac{2}{25}\beta^2$ και συνεπώς: $.\Delta=\beta^2-4\gamma=\beta^2-4\cdot\frac{6}{25}\cdot\beta^2=\frac{\beta^2}{25}\ge 0$. Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές, τις:

$x=\frac{\beta\pm\frac{\beta}{5}}{2}=\frac{5\beta\pm\beta}{10}$. Αν θέσουμε: $\rho_1=\frac{5\beta+\beta}{10}=\frac{3\beta}{5}$ και $\rho_2=\frac{5\beta-\beta}{10}=\frac{2\beta}{5}$, θα έχουμε: $3\rho_1-2\rho_2=...=\beta$.

Άρα η σχέση (5) είναι και ικανή.

• Συνεπώς η σχέση (5) είναι η ζητούμενη αναγκαία και ικανή συνθήκη.

2ος τρόπος. Επειδή στην εκφώνηση δεν υπάρχει διάταξη των ριζών, οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να ισχύουν αυτά που θέλουμε, είναι:

$$\begin{cases}\Delta \ge 0\\(3\rho_1 - 2\rho_2 = \beta \text{ ή } 3\rho_2 - 2\rho_1 = \beta)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\Delta \ge 0\\(3\rho_1 - 2\rho_2 - \beta)(3\rho_2 - 2\rho_1 - \beta) = 0\end{cases}$$

(πράξεις κτλ.)

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\beta^2 - 4\gamma \ge 0\\13\rho_1\rho_2 - 6\left(\rho_1^2 + \rho_2^2\right) - \beta\left(\rho_1 + \rho_2\right) + \beta^2 = 0\end{cases}$$

[επειδή $\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2$]

$$\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}}\begin{cases}\beta^2 - 4\gamma \ge 0\\25\gamma - 6\beta^2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma = \dfrac{6\beta^2}{25}\\\beta^2 - 4\cdot\dfrac{6\beta^2}{25} \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6\beta^2 = 25\gamma\\\beta^2 \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 6\beta^2 = 25\gamma.$$

• Συνεπώς η σχέση $\boxed{6\beta^2 = 25\gamma}$ είναι η ζητούμενη αναγκαία και ικανή συνθήκη.

Άσκηση 19. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν μπορεί να είναι ρίζα μιας εξίσωσης της μορφής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου α, β και γ είναι ρητοί αριθμοί με: $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \ne 0$.

Λύση. Έστω ότι αυτό συμβαίνει. Τότε θα έχουμε: $\alpha\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \beta\sqrt[3]{2} + \gamma = 0$ και συνεπώς:

$$\alpha\sqrt[3]{4} + \beta\sqrt[3]{2} + \gamma = 0 \ . \qquad (1)$$

Από την (1), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής με $\sqrt[3]{2}$, βρίσκουμε: $\beta\sqrt[3]{4} + \gamma\sqrt[3]{2} + 2\alpha = 0$. (2)

Από τις (1) και (2), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με β, της (2) με α και αφαιρώντας κατά μέλη τις προκύπτουσες, βρίσκουμε:

$$\left(\beta^2 - \alpha\gamma\right)\sqrt[3]{2} = 2\alpha^2 - \beta\gamma \ . \quad (3)$$

Αν $\beta^2 - \alpha\gamma \ne 0$, τότε θα είχαμε το άτοπο:

$\sqrt[3]{2} = \dfrac{2\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta^2 - \alpha\gamma}$ (άρρητος = ρητός). Άρα: $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$ και από την (3): $2\alpha^2 - \beta\gamma = 0$. Συνεπώς: $\beta^2 = \alpha\gamma$ **(4)** και $\beta\gamma = 2\alpha^2$ **(5)**. Από αυτές βρίσκουμε ότι:

$\beta^3\gamma = 2\alpha^3\gamma \Rightarrow \gamma\left(\beta^3 - 2\alpha^3\right) = 0 \Rightarrow \left(\gamma = 0 \text{ ή } \beta^3 = 2\alpha^3\right)$.

• Αν γ=0, τότε , από την (4) έπεται ότι β=0 και ακολούθως από την (5) ότι α=0, άτοπο, λόγω της υπόθεσης.

• Αν $\beta^3 = 2\alpha^3$, τότε: $\beta = \alpha\sqrt[3]{2}$, όπως παραπάνω, βρίσκουμε ότι: α=β=0 και ακολούθως από την (1) ότι γ = 0, άτοπο. Άρα…

Σημείωση. Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια τέτοια εξίσωση δεν μπορεί να έχει ρίζα της μορφής: $\sqrt[3]{\delta}$, ούτε της μορφής: $\lambda + \sqrt[3]{\delta}$, ούτε της μορφής: $\lambda + \sqrt[3]{\delta} + \sqrt[3]{\delta^2}$, όπου δ και λ ρητοί αριθμοί και ο δ δεν είναι τέλειος κύβος ρητού αριθμού.

Άσκηση 20. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους οι εξισώσεις: $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ (1) και $2x^2 - (2\lambda + 3)x + 5\lambda + 1 = 0$ (2) έχουν πραγματικές ρίζες, εκ των οποίων μια είναι κοινή.

Λύση. 1) Έστω ότι για έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα επιτάγματα του προβλήματος και ότι ρ είναι μια κοινή τους ρίζα. Έτσι έχουμε:

$$\rho^2 - (\lambda + 2)\rho + 2\lambda = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

και $$2\rho^2 - (2\lambda + 3)\rho + 5\lambda + 1 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (3) με το 2 και από τα μέλη της προκύπτουσας αφαιρούμε τα μέλη της (4), οπότε μετά τις πράξεις κτλ. βρίσκουμε: $\rho = -\lambda - 1$. Αντικαθιστούμε στην (3) και βρίσκουμε: $(-\lambda - 1)^2 - (\lambda + 2)(-\lambda - 1) + 2\lambda = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow$

$$2\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \left(\lambda = -3 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}\right).$$

2) Αντιστρόφως. α) Έστω ότι $\lambda = -3$. Τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $x^2 + x - 6 = 0$ και έχει ρίζες το 2 και το -3 και η εξίσωση (2) γίνεται: $2x^2 + 3x - 14 = 0$ και έχει ρίζες το 2 και το $-\dfrac{7}{2}$. Άρα, η τιμή του $\lambda = -3$ είναι δεκτή (έχουν κοινή ρίζα το 2).

β) Έστω ότι $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Όμοια βρίσκουμε ότι και η τιμή αυτή είναι δεκτή (τότε έχουν κοινή ρίζα το $-\dfrac{1}{2}$). Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί λ είναι: $\lambda = -3$ και $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Άσκηση 21. Δύο βρύσες Α και Β γεμίζουν μαζί μια δεξαμενή σε 12 ώρες. Η βρύση Β γεμίζει μόνη της την δεξαμενή σε 10 ώρες περισσότερες από όσες ώρες την γεμίζει μόνη της η βρύση Α. Να βρείτε σε πόσες ώρες κάθε μια από τις βρύσες αυτές γεμίζει μόνη της την δεξαμενή αυτή .

Λύση. Έστω ότι ο όγκος της δεξαμενής αυτής είναι Vm^3. Έστω τώρα ότι η βρύση Α γεμίζει τη δεξαμενή σε x ώρες. Έτσι, η βρύση Β την γεμίζει σε x+10 ώρες. Σε μία ώρα η βρύση Α γεμίζει όγκο ίσο με $\dfrac{V}{x}m^3$, η βρύση Β γεμίζει όγκο ίσο με

$\dfrac{V}{x+10}m^3$. και άρα και οι δύο μαζί γεμίζουν όγκο ίσο με: $\left(\dfrac{V}{x}+\dfrac{V}{x+10}\right)m^3$. Εξάλλου, σε μία ώρα και οι δύο μαζί γεμίζουν όγκο ίσο με $\dfrac{V}{12}m^3$. Συνεπώς:

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{x+10}=\frac{V}{12}\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow ...$$
$$\Leftrightarrow x^2-14x-120=0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι: $x=20$ και $x=-6$ (απορρίπτεται να ορίζει). Συνεπώς, η βρύση Α γεμίζει τη δεξαμενή σε 20 ώρες και η Β σε:20+10=30 ώρες.

– Υπενθυμίζουμε το παρακάτω θεώρημα:
Θεώρημα (του τριωνύμου). Θεωρούμε το τριώνυμο: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$. Θέτουμε: . $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ ..

1) Αν $\Delta<0$, τότε $\alpha f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2) Αν $\Delta=0$, τότε $\alpha f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και $f(-\dfrac{\beta}{2\alpha})=0$.

3) Αν $\Delta>0$, τότε: $\begin{cases}\alpha f(x)>0, \text{ για κάθε } x\in(-\infty,\rho_1)\cup(\rho_2,+\infty)\\ \alpha f(x)<0, \text{ για κάθε } x\in(\rho_1,\rho_2),\end{cases}$

όπου ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες του $f(x)$ $(\rho_1<\rho_2)$.

Άσκηση 22. Θεωρούμε το τριώνυμο:

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{3}x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{2}.}$$

α) Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο αυτό έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Τις ονομάζουμε: ρ_1 και ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$.

β) Να βάλετε κατά σειρά μεγέθους τους αριθμούς: $\xi=2+\sqrt{3}$, ρ_1 και ρ_2.

Λύση. α) Ο κλασικός τρόπος είναι να σχηματίσουμε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου αυτού και να αποδείξουμε ότι είναι θετική. Μπορούμε όμως (να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις και) να εργαστούμε συντομότερα ως εξής: Παρατηρούμε ότι: $f(1)=\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}=\sqrt{2}-2<0$.

Αν $\Delta\leq 0$, θα είχαμε $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(αφού ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=\sqrt{2}>0$), άτοπο, διότι $f(1)<0$. Άρα: Δ>0.

β) Θα είχαμε να κάνουμε πάρα πολλές πράξεις και θα ήταν εξαιρετικά επίπονο αν επιχειρούσαμε να βρούμε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 και μετά να κάνουμε τη σύγκριση που θέλουμε. Θα εργαστούμε, απλούστερα , ως εξής: Έχουμε:

$$f(\xi)=\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2}=...=3\sqrt{3}+5+\sqrt{2}>0,$$

οπότε: $\alpha f(\xi)>0$ και άρα το ξ δεν ανήκει στο διάστημα: $[\rho_1,\rho_2]$ (γιατί;). Λόγω αυτού και επειδή:

$\rho_1<\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}<\rho_2$ και $\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}<2+\sqrt{3}=\xi$,

συμπεραίνουμε ότι : $\rho_1<\rho_2<\xi$.

Άσκηση 23. Το τριώνυμο: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου α, β και γ ακέραιοι με α>0, έχει πραγματικές ρίζες x_1 και x_2, για τις οποίες ισχύουν: $0<x_1<x_2<1$. Να αποδείξετε ότι $\alpha\geq 5$.

Λύση. Έχουμε: $f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$. Επίσης έχουμε: αf(0)>0 και αf(1)>0. Και επειδή α>0 και οι αριθμοί f(0) και f(1) είναι ακέραιοι, έχουμε:

$$\begin{cases}f(0)>0\\ f(1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)\geq 1\\ f(1)\geq 1\end{cases}\Rightarrow 1\leq f(0)f(1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\leq\alpha^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\quad(1)$$

Εξάλλου, έχουμε: $x_1(1-x_1)=x_1-x_1^2=$

$$=-\left(x_1^2-x_1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}.$$

Έτσι, έχουμε: $0<x_1(1-x_1)\leq\dfrac{1}{4}$, με το = μόνο αν $x_1=\dfrac{1}{2}$. Και $0<x_2(1-x_2)\leq\dfrac{1}{4}$, με το = μόνο αν $x_2=\dfrac{1}{2}$. Και επειδή οι σχέσεις αυτές δεν ισχύουν και οι δύο με το = (γιατί, τότε $x_1=x_2=1/2$, άτοπο), έχουμε:

$$x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)<\frac{1}{16}\Rightarrow\alpha^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)<\frac{\alpha^2}{16}\quad(2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$1<\frac{\alpha^2}{16}\Rightarrow\alpha^2>16\Rightarrow\alpha>4\Rightarrow\alpha\geq 5.$$

Άσκηση 24. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda\in\mathbb{R}$, για τους οποίους κάθε αριθμός $x\in(1,2)$ είναι λύση της ανίσωσης: $x^2+\lambda x+\lambda^2+6\lambda<0$.

Λύση. Θέτουμε: $f(x)=x^2+\lambda x+\lambda^2+6\lambda$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου αυτού είναι:

$$\Delta=\lambda^2-4(\lambda^2+6\lambda)=...=-3\lambda(\lambda+8).$$

Αν $\Delta\leq 0$, τότε: $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς με $x\in(1,2)$ δεν είναι $f(x)<0$. Έστω τώρα ότι Δ>0. Τότε το f(x) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ρ_1 και ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$. Έχουμε: f(x)<0 για κάθε $x\in(\rho_1,\rho_2)$ και μόνο. Συνεπώς, ισχύει το ζητούμενο αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases}\Delta>0\\(1,2)\subseteq(\rho_1,\rho_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\lambda(\lambda+8)>0\\\rho_1\le1<2\le\rho_2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda(\lambda+8)<0\\f(1)\le0\\f(2)\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8<\lambda<0\\\lambda^2+7\lambda+1\le0\\\lambda^2+8\lambda+4\le0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8<\lambda<0\\\dfrac{-7-\sqrt{45}}{2}\le\lambda\le\dfrac{-7+\sqrt{45}}{2}\\-4-\sqrt{12}\le\lambda\le-4+\sqrt{12}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-7-\sqrt{45}}{2}\le\lambda\le-4+\sqrt{12}.$$

Αυτοί είναι οι ζητούμενοι αριθμοί λ.

Σημειώνουμε ότι:

Με: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

1) $\left(\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},\ f(x)>0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha>0\\\Delta<0\end{cases}$

2) $\left(\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},\ f(x)\ge0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha>0\\\Delta\le0\end{cases}$

3) $\left(\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},\ f(x)<0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha<0\\\Delta<0\end{cases}$

4) $\left(\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},\ f(x)\le0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha<0\\\Delta\le0\end{cases}$

Άσκηση 25. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς λ, για τους οποίους, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύουν:

$$-3<\frac{x^2+\lambda x-2}{x^2-x+1}<2. \quad (1)$$

Λύση. Επειδή: $x^2-x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (έχει διακρίνουσα αρνητική), έχουμε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+3x-3<x^2+\lambda x-2\\x^2+\lambda x-2<2x^2-2x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+(\lambda-3)x+1>0\\x^2-(\lambda+2)x+4>0\end{cases}$$

Για να ισχύουν αυτές για κάθε , πρέπει και αρκεί: $\begin{cases}(\lambda-3)^2-16<0\\(\lambda+2)^2-16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\lambda-3|<4\\|\lambda+2|<4\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-4<\lambda-3<4\\-4<\lambda+2<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<\lambda<7\\-6<\lambda<2\end{cases}\Leftrightarrow-1<\lambda<2$. Άρα, οι ζητούμενοι ακέραιοι αριθμοί λ είναι:λ=0 και λ=1.

Άσκηση 26. Να βρείτε τον μικρότερο αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$2x-x^2\le\alpha$ και $1+6x-x^2\le\alpha$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}2x-x^2\le\alpha\\1+6x-x^2\le\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+\alpha\ge0\\x^2-6x+\alpha-1\ge0\end{cases}$$

Για να ισχύουν οι σχέσεις αυτές για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases}4-4\alpha\le0\\36-4(\alpha-1)\le0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\ge1\\\alpha\ge10\end{cases}\Leftrightarrow\alpha\ge10.$$

Άρα, η ζητούμενη τιμή του α είναι: α = 10.

Άσκηση 27. Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda\in\mathbb{R}$, για τους οποίους το κλάσμα: $\dfrac{x^2+x-\lambda}{x^2-x+1}$, όπου $x\in\mathbb{R}$, λαμβάνει την τιμή 3 και ισχύει: $\dfrac{x^2+x-\lambda}{x^2-x+1}\le3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση. Η διακρίνουσα του τριωνύμου: x^2-x+1 είναι αρνητική και άρα: $x^2-x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς το κλάσμα ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να ισχύουν τα ζητούμενα, πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases}\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},\dfrac{x^2+x-\lambda}{x^2-x+1}\le3\\\text{Υπάρχει } x\in\mathbb{R},\dfrac{x^2+x-\lambda}{x^2-x+1}=3\end{cases}$$

άλλων (απαλοιφή παρονομαστών, πράξεις κτλ.)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{Για κάθε } x\in\mathbb{R},2x^2-4x+(\lambda+3)\ge0\\\text{Υπάρχει } x\in\mathbb{R},2x^2-4x+(\lambda+3)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4^2-4\cdot2\cdot(\lambda+3)\le0\\4^2-4\cdot2\cdot(\lambda+3)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow16-8(\lambda+3)=0\Leftrightarrow\lambda=-1.$$

Άσκηση 28. Για δύο αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει: $\left|\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}\right|\le2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha|\le2\sqrt{3}$ και $|\beta|\le2$.

Λύση. Έχουμε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $-2\le\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+1}\le2$

$$\Rightarrow-2(x^2+1)\le x^2+\alpha x+\beta\le2(x^2+1)\Rightarrow$$

$\begin{cases}3x^2+\alpha x+\beta+2\ge0\\x^2-\alpha x-\beta+2\ge0\end{cases}$. Συνεπώς:

$$\begin{cases}\alpha^2-12(\beta+2)\le0\\\alpha^2+4(\beta-2)\le0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2\le12(\beta+2)\ \ (1)\\-\alpha^2\ge4(\beta-2)\ \ (2)\end{cases}.$$

Από τις (1)και (2) βρίσκουμε ότι:

α) $\begin{cases}\beta+2\ge0\\\beta-2\le0\end{cases}\Rightarrow-2\le\beta\le2\Rightarrow|\beta|\le2.$

β) $\begin{cases}\beta\ge\dfrac{\alpha^2-24}{12}\\\beta\le\dfrac{8-\alpha^2}{4}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\alpha^2-24}{12}\le\beta\le\dfrac{8-\alpha^2}{4}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2-24}{12}\le\frac{8-\alpha^2}{4}\Rightarrow\alpha^2\le12\Rightarrow|\alpha|\le2\sqrt{3}.$$